



北京大学
PEKING UNIVERSITY

第二届地下和空间粒子物理与宇宙物理前沿问题研讨会

2023年5月7日至12日,杭州

相对论组态相互作用密度泛函理论:

原子核 $\beta\beta$ 衰变核矩阵元研究

王亚坤

合作者: 孟杰、赵鹏巍

目录

- 引言
- 理论框架
- 结果讨论
- 总结

原子核双贝塔衰变及其研究意义

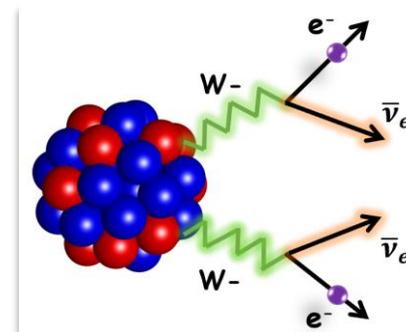
□ 两中微子双 β 衰变 - $2\nu\beta\beta$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e$$

轻子数守恒，标准模型允许的衰变过程

已在 12 个原子核中观测到衰变信号

Saakyan, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 63, 503 (2013)



□ 无中微子双 β 衰变 - $0\nu\beta\beta$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-$$

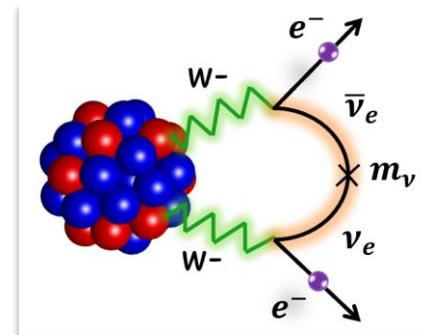
检验轻子数是否守恒

确定中微子的 Majorana 属性

确定中微子的质量排序和绝对质量

理解宇宙中物质和反物质的不对称

Avignone, Elliott, Engel, Rev. Mod. Phys. 80, 481 (2008)

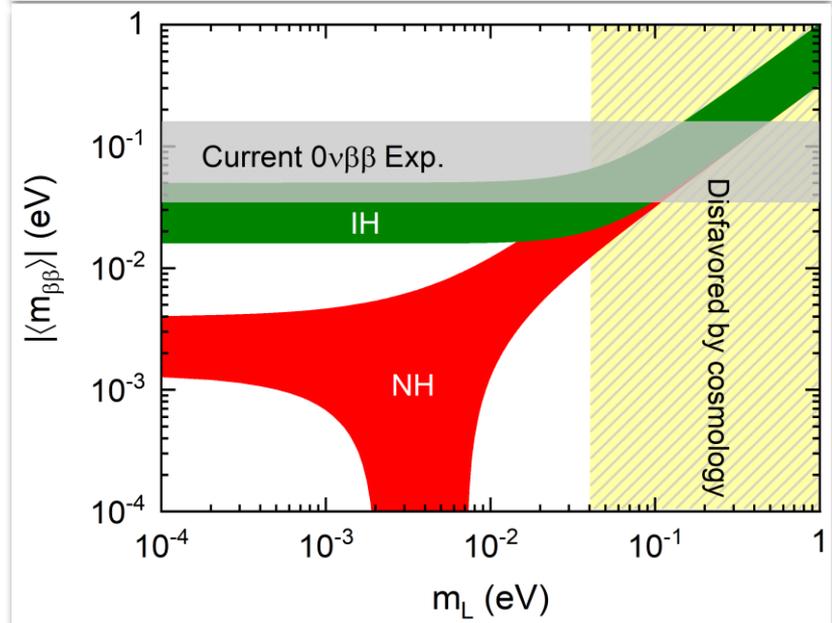


无中微子双贝塔实验研究进展

□ $0\nu\beta\beta$ 衰变实验:

候选核	半衰期下限 (年)	实验合作组
^{48}Ca	5.8×10^{22}	ELEGANT-VI
^{76}Ge	1.8×10^{26}	GERDA
	8.3×10^{25}	MAJORANA
^{82}Se	4.6×10^{24}	CUPID-0
^{100}Mo	1.5×10^{24}	CUPID-Mo
^{128}Te	3.6×10^{24}	CUORE
^{130}Te	3.2×10^{25}	CUORE
^{136}Xe	2.3×10^{26}	KamLAND-Zen
	3.7×10^{25}	EXO-200
^{150}Nd	2.0×10^{22}	NEMO-3

候选核	实验名称	牵头单位
^{76}Ge	CDEX	清华大学
^{82}Se	$N\nu\text{DEx}$	近代物理研究所
^{100}Mo	CUPID-China	复旦大学
^{136}Xe	PandaX	上海交通大学



双贝塔候选核 ^{76}Ge

□ 基于高纯锗探测阵列的 $0\nu\beta\beta$ 衰变实验特点:

- ✓ 高纯锗探测器 \Rightarrow 高的能量分辨率 (2.53 ± 0.08 keV)
- ✓ “源=探测器” \Rightarrow 高的探测效率
- ✓ 液氦屏蔽 \Rightarrow 低本底 ($\sim 10^{-4}$ cts/keV \cdot kg \cdot yr), background-free experiment

Andrea et al., Universe 7, 341 (2021)

□ GERDA 合作组给出 ^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 衰变的半衰期约为 1.8×10^{26} 年 \Rightarrow 最严格的半衰期限制之一。

Agostini et al., PRL 125, 252502 (2020)

□ CDEX-1T、LEGEND-1000 实验: 半衰期 10^{28} 年, $m_{\beta\beta} = 10 - 20$ meV。

原子核 ^{76}Ge 是探测 $0\nu\beta\beta$ 衰变过程最具竞争力的候选核之一!

$0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元

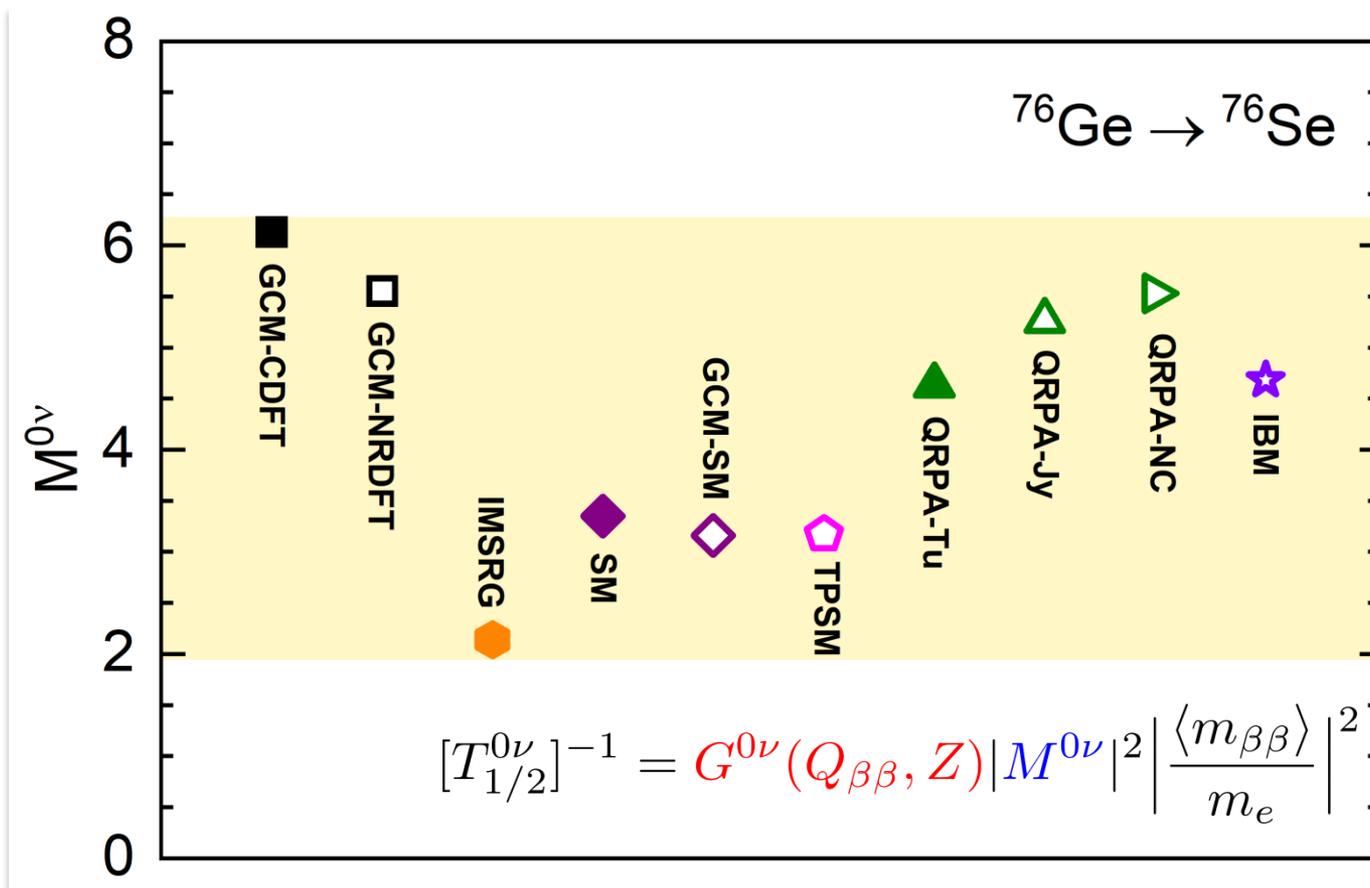
- $0\nu\beta\beta$ 衰变理论研究的关键是通过核多体方法计算给出相关的原子核矩阵元。
- $0\nu\beta\beta$ 衰变的半衰期: Tomoda, Rep. Prog. Phys. 54, 53 (1991)

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu}(Q_{\beta\beta}, Z) |M^{0\nu}|^2 \left| \frac{\langle m_{\beta\beta} \rangle}{m_e} \right|^2$$

- ✓ 相空间因子 $G^\alpha(Q_{\beta\beta}, Z)$: 通过严格求解轻子波函数精确计算
- ✓ 核矩阵元 $M^\alpha = \langle \Psi^f | \hat{Q}_\alpha | \Psi^i \rangle$: 原子核多体方法计算给出
- ✓ 有效中微子质量 $\langle m_{\beta\beta} \rangle$: 结合实验半衰期与核矩阵元确定

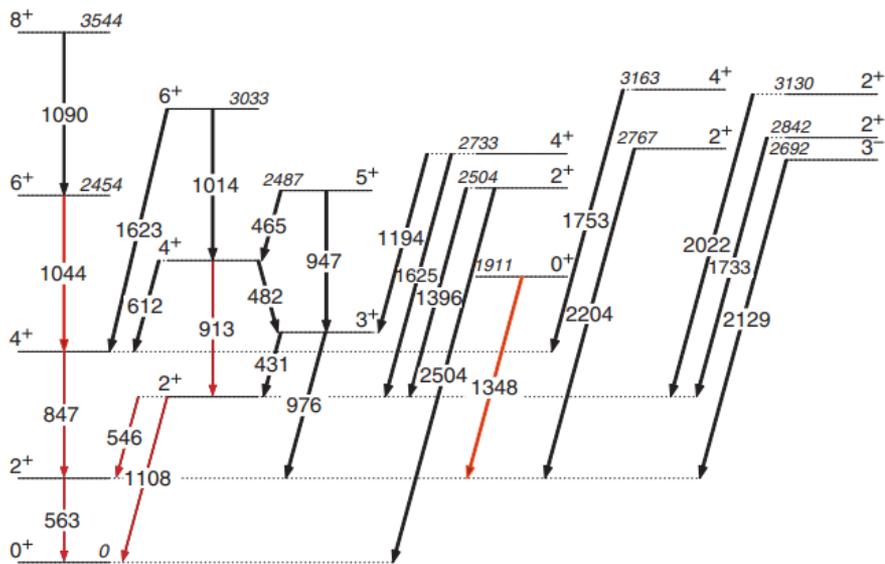
原子核矩阵元对分析、解释实验结果，提取有效中微子质量等新物理参数至关重要。

原子核 ^{76}Ge 核矩阵元研究进展



不同理论方法给出的核矩阵元值存在约 3 倍的差异，这严重限制了有效中微子质量的确定精度，也制约了对实验结果的分析解释。

多体波函数约束：核谱学和 $2\nu\beta\beta$ 衰变数据



- 通过测量 E2 跃迁矩阵元，结合转动量不变求和分析，Ayangeakaa 等人给出了 ^{76}Ge 具有显著三轴形变的实验证据，相应的三轴形变值 $\gamma = 27^\circ$ 。

Ayangeakaa et al., PRL 123, 102501 (2019)

- GERDA 实验测得 ^{76}Ge $2\nu\beta\beta$ 衰变的半衰期为 $(1.926 \pm 0.094) \times 10^{21}$ 年，相应的 $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元值为 $0.126 \pm 0.003 \text{ MeV}^{-1}$ 。

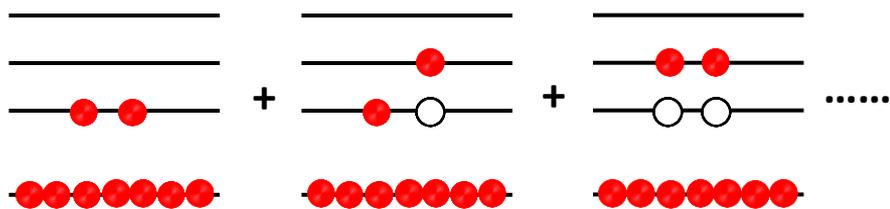
GERDA Collaboration., EPJC 75,416 (2015)

原子核 ^{76}Ge $2\nu\beta\beta$ 衰变、三轴形变、及相应的谱学性质，为核多体波函数的精度以及 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元的预言结果提供了重要的约束。

$$M^\alpha = \langle \Psi^f | \hat{Q}_\alpha | \Psi^i \rangle$$

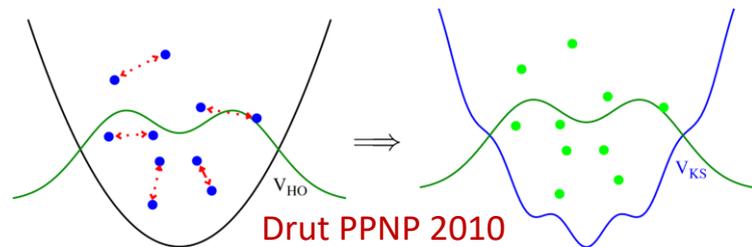
相对论组态相互作用密度泛函理论

□ 组态相互作用壳模型 (SM):



$$\hat{H}|\Psi_i\rangle = E_i|\Psi_i\rangle \Rightarrow \hat{H}_{\text{eff}}|\Phi_i\rangle = E_i|\Phi_i\rangle$$

□ 密度泛函理论 (DFT):

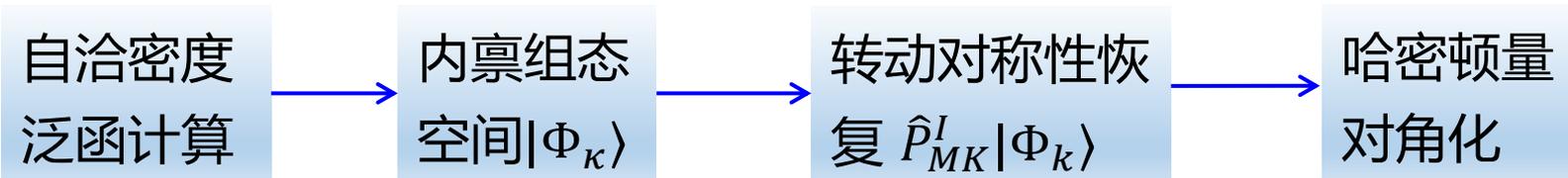


$$E[\rho] \Rightarrow \hat{h} = \frac{\partial E[\rho]}{\partial \rho}, \hat{h}\phi_i = \varepsilon_i\phi_i \Rightarrow \rho = \sum_i |\phi_i|^2$$

普适有效相互作用 组态混合 对称性破缺 全模型空间 形变重核 谱学性质

壳模型	✗	✓	✗	✗	✗	✓
密度泛函	✓	✗	✓	✓	✓	✗

Relativistic Configuration-interaction Density functional (ReCD) theory:



轴对称偶偶核: Zhao et al., PRC 94, 041301(R) (2016); Wang et al., PRC 105, 054311 (2022)

本文工作

□ 自洽考虑原子核的三轴形变自由度，发展既可以描述偶偶核也可以描述奇奇核的 ReCD 理论：

- ✓ 实现原子核谱学性质、 $2\nu\beta\beta$ 衰变、 $0\nu\beta\beta$ 衰变的统一描述
- ✓ 通过再现 ^{76}Ge 的谱学性质、 $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元，检验模型的精度
- ✓ 预言 ^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 衰变的核矩阵元值
- ✓ 分析三轴形变自由度对 ^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元的贡献

核多体波函数

□ ReCD 框架下，原子核多体波函数的形式为，

$$|\Psi_{IM}^\sigma\rangle = \sum_{K\kappa} F_{K\kappa}^{I\sigma} \hat{P}_{MK}^I |\Phi_\kappa\rangle$$

$F_{K\kappa}^{I\sigma}$ 展开系数， \hat{P}_{MK}^I 角动量投影算符， $|\Phi_\kappa\rangle$ 内禀波函数

偶偶核： $|\Phi_\kappa\rangle \in \{|\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_j}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\nu_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_j}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger |\Phi_0\rangle$
 $\hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_j}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_k}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_l}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\nu_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_k}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_l}^\dagger |\Phi_0\rangle\}$

奇奇核： $|\Phi_\kappa\rangle \in \{\hat{\beta}_{\pi_0}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_0}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_k}^\dagger \hat{\beta}_{\pi_l}^\dagger |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_j}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_k}^\dagger \hat{\beta}_{\nu_l}^\dagger |\Phi_0\rangle\}$

□ 相对论 Hartree-Bogoliubov 方程，

$$\begin{pmatrix} h_D - \lambda & \Delta \\ -\Delta^* & -h_D^* + \lambda \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}$$

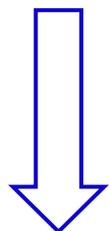
□ Hill-Wheeler 方程，

$$\sum_{K'\kappa'} \{ \langle \Phi_\kappa | \hat{H} \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{\kappa'} \rangle - E^{I\sigma} \langle \Phi_\kappa | \hat{P}_{KK'}^I | \Phi_{\kappa'} \rangle \} F_{K'\kappa'}^{I\sigma} = 0$$

跃迁算符与核矩阵元

□ 衰变核矩阵元的形式为: $M^\alpha = \langle \Psi_f^{0+} | \hat{O}^\alpha | \Psi_i^{0+} \rangle$

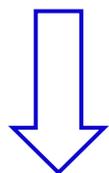
$$\hat{O}^{0\nu} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{|\mathbf{q}|} \sum_n \frac{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{q}| + E_n - 1/2(E_i + E_f)}$$



$$|\mathbf{q}| \sim 100 \text{ MeV} \gg E_n - 1/2(E_i + E_f)$$

$$E_n - 1/2(E_i + E_f) \Rightarrow E_d$$

$$\hat{O}^{0\nu} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{|\mathbf{q}|} \sum_n \frac{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{q}| + E_d}$$



$$\sum |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| = 1$$

$$\hat{O}^{0\nu} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{|\mathbf{q}|} \frac{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{q}| + E_d} \quad \text{封闭近似}$$

强子流: $\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x}) \left[g_V(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu + i g_M(\mathbf{q}^2) \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2m_p} q^\nu - g_A(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu \gamma_5 - g_P(\mathbf{q}^2) q_\mu \gamma_5 \right] \tau_- \psi(\mathbf{x})$

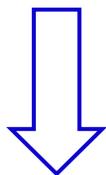
跃迁算符与核矩阵元

□ 衰变核矩阵元的形式为: $M^\alpha = \langle \Psi_f^{0+} | \hat{O}^\alpha | \Psi_i^{0+} \rangle$

$$\hat{O}^{2\nu} = \frac{1}{g_A^2} \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \sum_n \frac{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}{E_n - 1/2(E_i + E_f)}$$

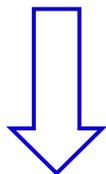
$2\nu\beta\beta$ 衰变算符不包含对转移动量 \mathbf{q} 的积分 \rightarrow 封闭近似不再适用

$$\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x}) \left[g_V(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu + i g_M(\mathbf{q}^2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m_p} - g_A(\mathbf{q}^2) \gamma_\mu \gamma_5 - g_P(\mathbf{q}^2) q_\mu \gamma_5 \right] \tau_- \psi(\mathbf{x})$$



$$|\mathbf{q}| \sim 2 \text{ MeV}, \quad g_{V,M,A,P}(\mathbf{q}^2) \rightarrow g_{V,M,A,P}(0)$$

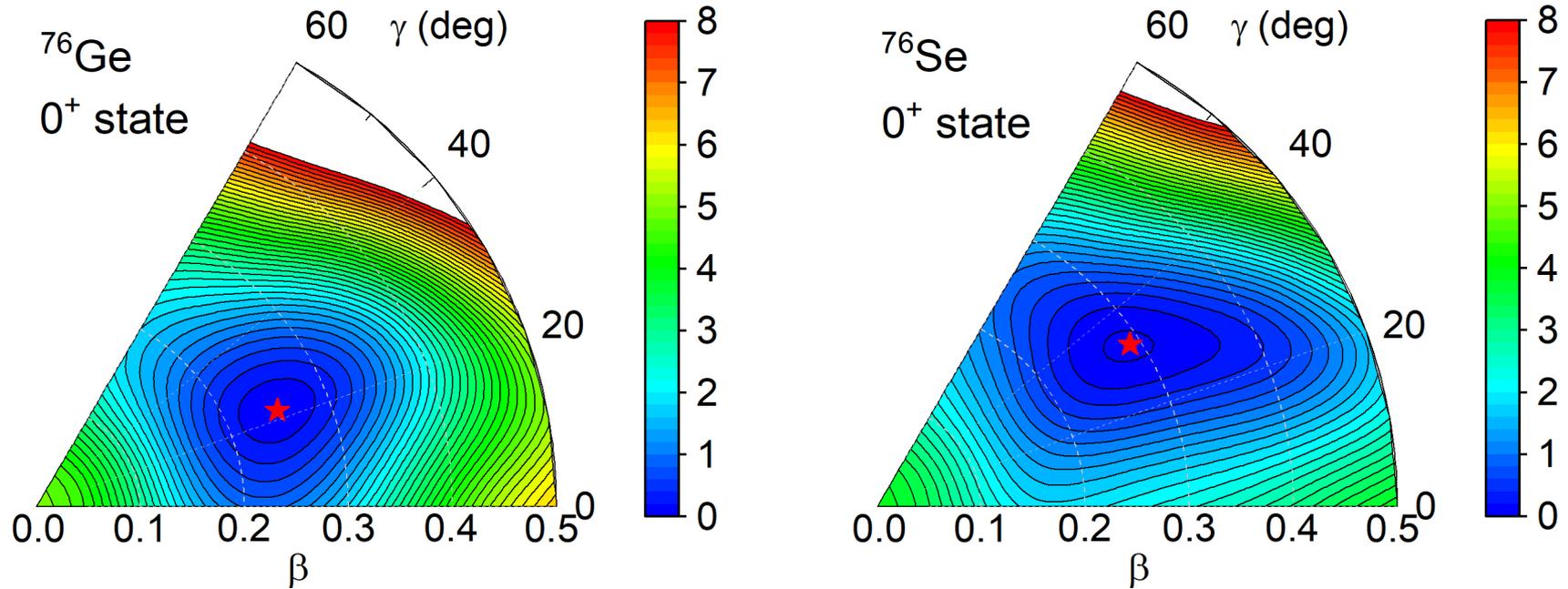
$$\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}) = g_A \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_\mu \gamma_5 \tau_- \psi(\mathbf{x})$$



$$\gamma_\mu \gamma_5 \rightarrow \sigma_i \rightarrow 1 \text{ 阶球张量}$$

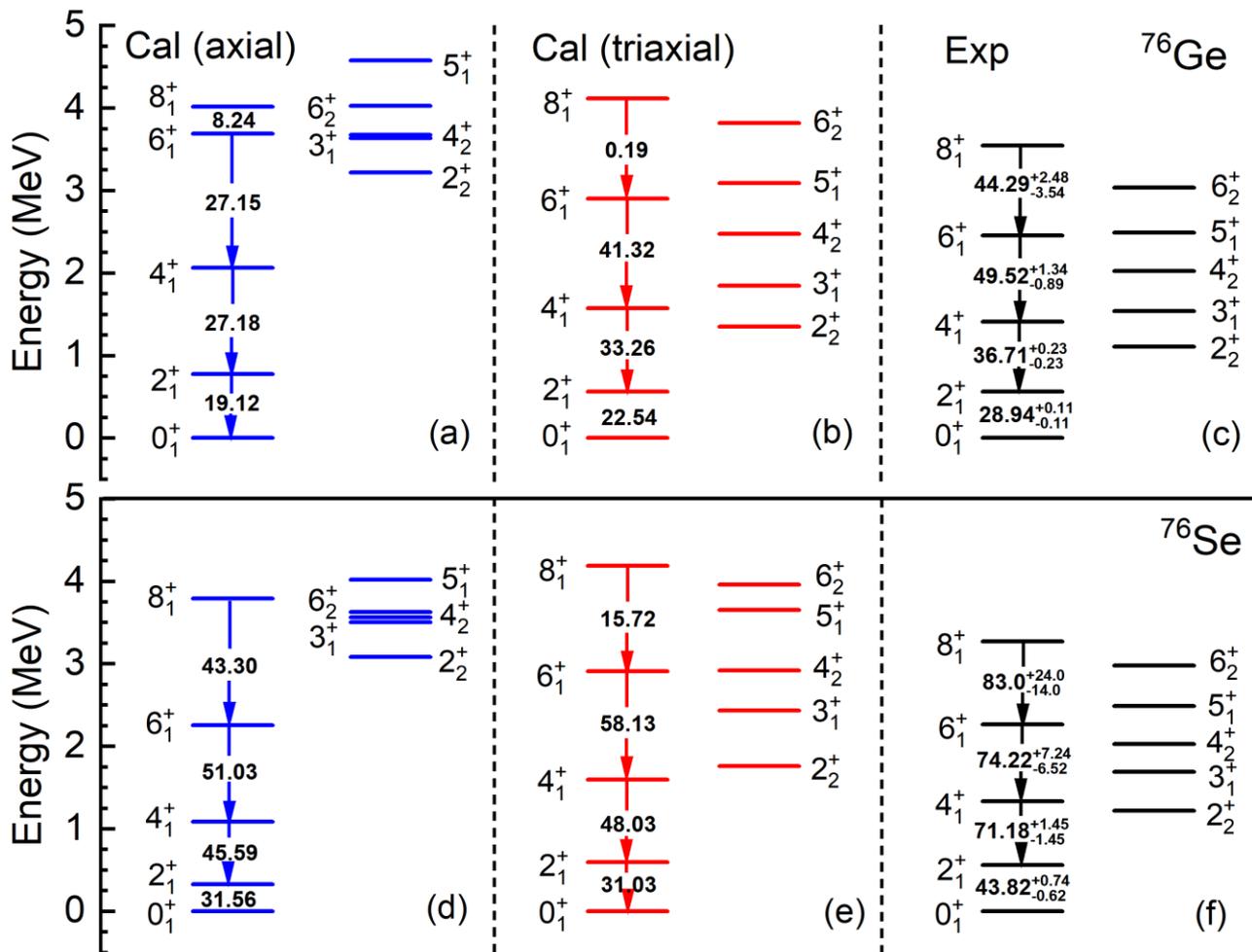
$$\hat{O}^{2\nu} = \frac{1}{g_A^2} \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \sum_n \frac{\mathcal{J}_\mu^\dagger(\mathbf{x}_1) |1_n^+\rangle \langle 1_n^+| \mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)}{E_n - 1/2(E_i + E_f)}$$

^{76}Ge 和 ^{76}Se 的位能曲面



- ReCD 理论计算给出的 ^{76}Ge 和 ^{76}Se 的 0^+ 态位能面均具有显著的三轴形变极小，相应的三轴形变 γ 分别为 22° 和 32° ，与实验结果 27° 和 24° 相符。

^{76}Ge 和 ^{76}Se 的谱学性质

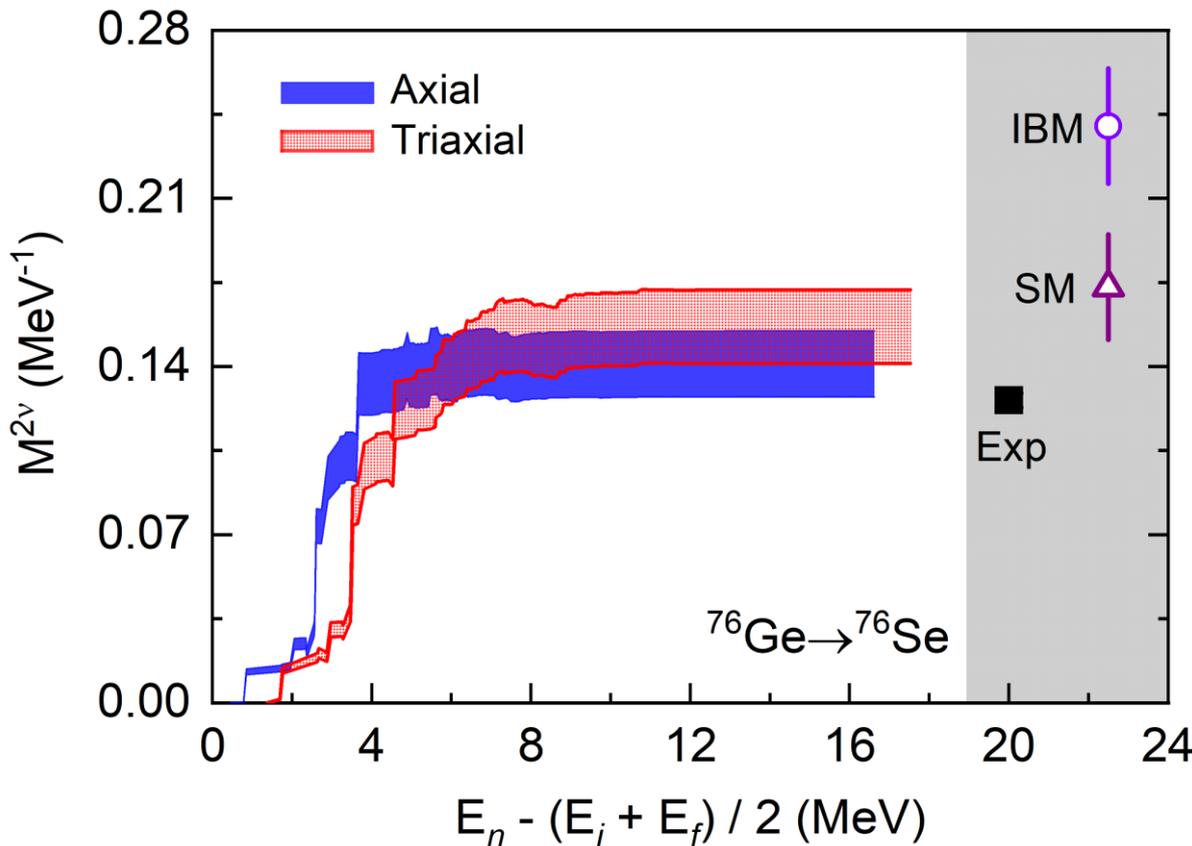


□ **轴对称形变**：理论计算无法再现 γ 带的实验结果， ^{76}Ge 的 2_1^+ 态能量被高估，而 ^{76}Se 的 2_1^+ 态能量被低估。

□ **三轴形变**：理论计算结果较好地再现了基态转动带以及 γ 带的实验结果。

□ **考虑原子核的三轴形变**，显著改善了 ^{76}Ge 和 ^{76}Se 多体波函数的理论描述。

^{76}Ge $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元值



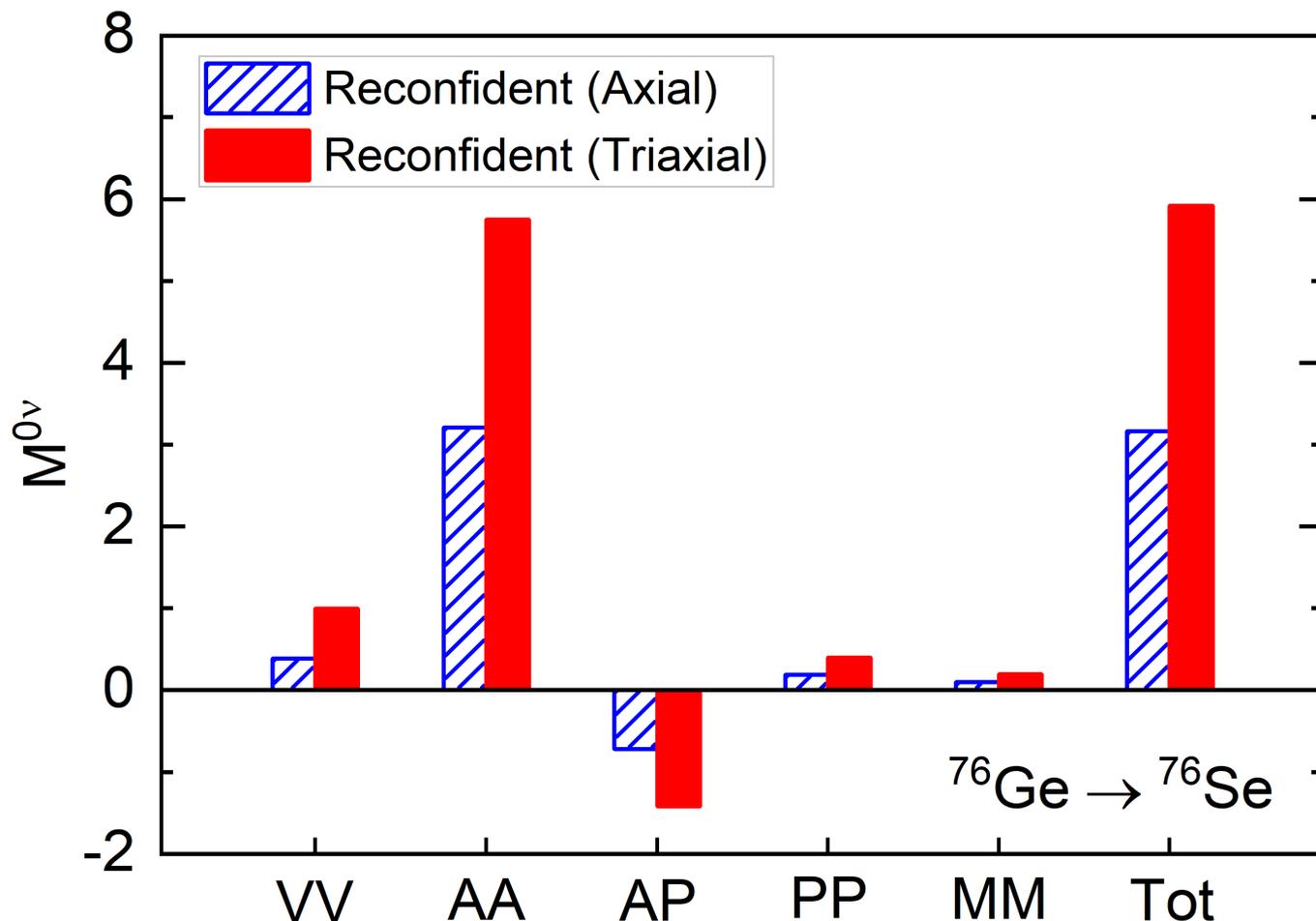
- ReCD 理论给出的 ^{76}Ge $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元值很好地再现了实验结果
- 考虑三轴形变自由度后, ^{76}Ge $2\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元值增加约 11%

有效轴矢耦合常数

$$g_{eff} = qg_A,$$

$$q \in [0.68, 0.77]$$

^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 核矩阵元值



□ 三轴形变自由度对描述 ^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元很重要。考虑三轴形变后，核矩阵元值从 3.16 增加到 5.92。

总结

□ 发展了相对论组态相互作用密度泛函理论:

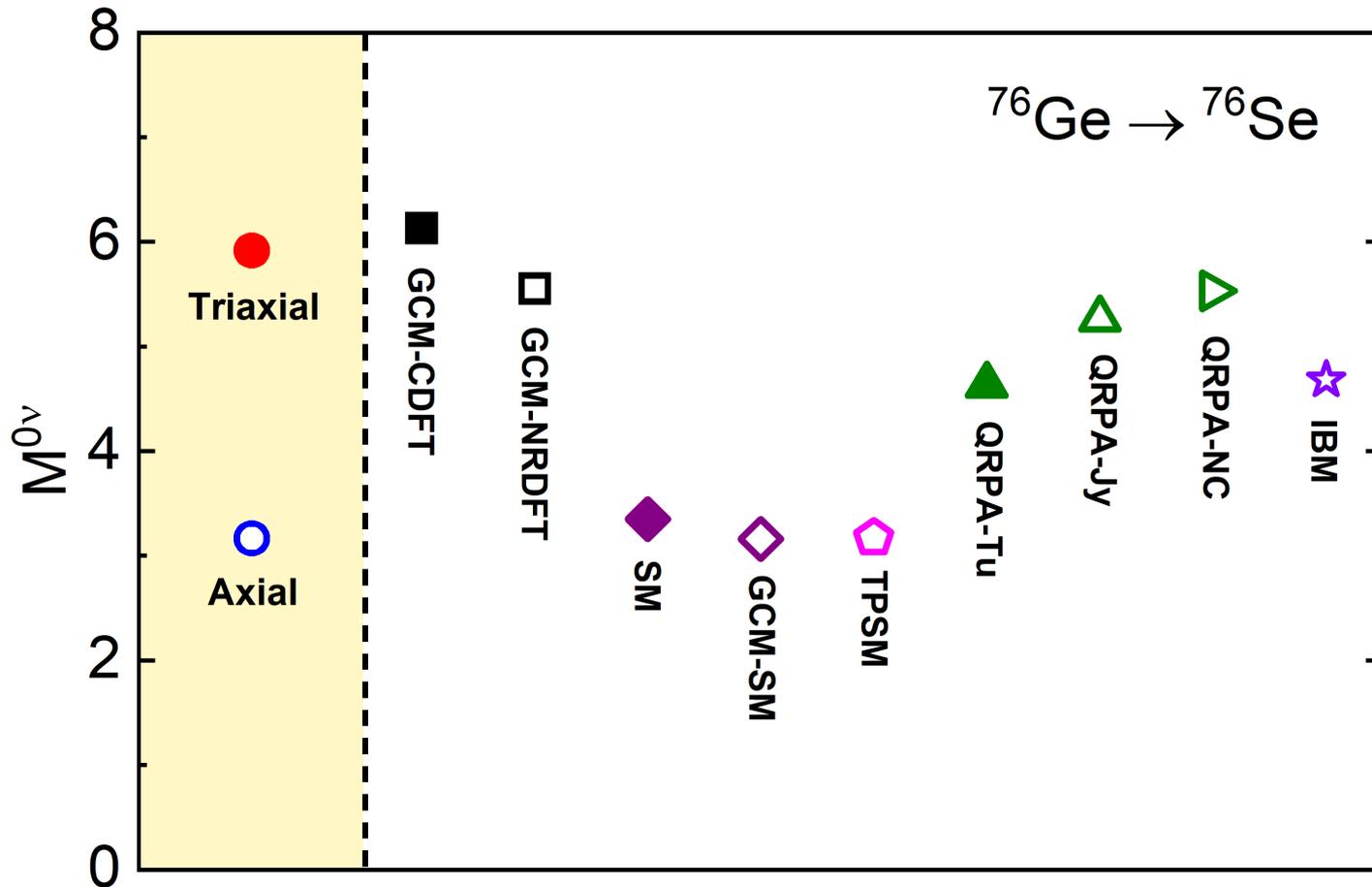
- ✓ 结合了组态相互作用壳模型和相对论密度泛函理论的优势
- ✓ 自洽考虑原子核的三轴形变
- ✓ 同时处理偶偶核和奇奇核
- ✓ 统一描述原子核的谱学性质和 $\beta\beta$ 衰变过程

□ 对原子核 ^{76}Ge 的双贝塔衰变进行了微观研究:

- ✓ 考虑三轴形变后, 理论计算很好地再现了原子核 ^{76}Ge 和 ^{76}Se 的低激发谱学性质, 以及 ^{76}Ge 到 ^{76}Se 的两中微子 $\beta\beta$ 衰变核矩阵元
- ✓ 三轴形变对 ^{76}Ge 两中微子 $\beta\beta$ 衰变核矩阵元的影响比较小, 使核矩阵元值增加约 11%
- ✓ 三轴形变会显著增加 ^{76}Ge 无中微子 $\beta\beta$ 衰变核矩阵元值

附录

^{76}Ge $0\nu\beta\beta$ 核矩阵元值



- 考虑三轴形变后，Reconfident 给出的核矩阵元值与 GCM-CDFT、GCM-NRDFT 的结果相当，稍高于 IBM、QRPA 的计算结果，显著高于 SM、GCM-SM、TPSM 的计算结果。