大气簇射的理论计算与模拟方法调研

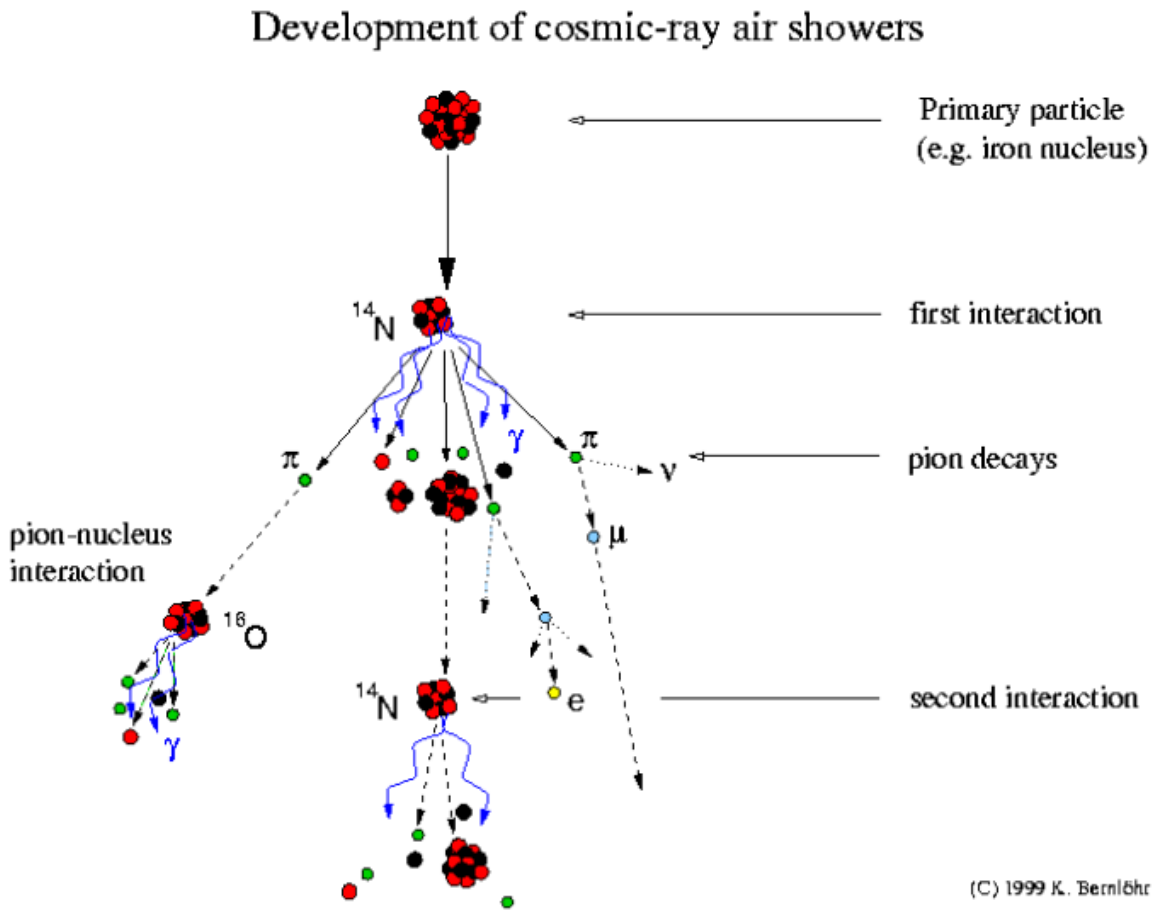
刘沛洋

目录

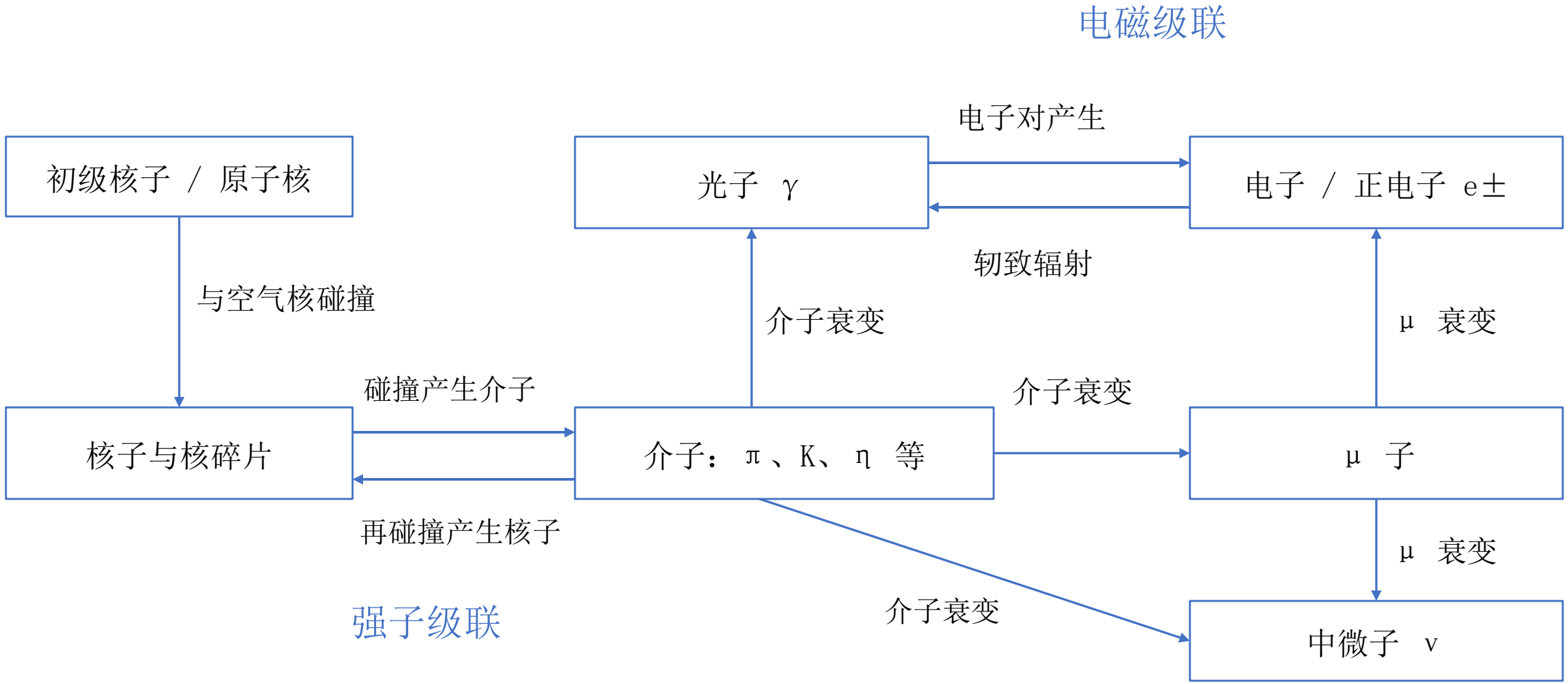
- 大气簇射的理论描述
- MCEq 通量计算
- CORSIKA 蒙卡模拟
- 强子相互作用模型与簇射观测量
- 总结

大气簇射

- 初级宇宙线进入大气时与大气原子核碰撞，产生核子、π、K 等；产生的次级成分通常仍具有较高能量，继续与原子核相互作用或者衰变，产生链式反应。
- 不同的衰变过程产生不同的簇射成分。中性 π 介子衰变为两个光子，光子通过电子对产生、电子和正电子通过韧致辐射，共同发展出电磁级联。带电 π 介子和 K 介子的衰变则是大气 μ 子和中微子的重要来源。
- 簇射沿初级宇宙线的入射方向发展，并向两侧扩展。随着能量分配给越来越多的次级粒子，粒子数先增加，达到峰值后逐渐减少。部分 μ 子能够穿过较厚的大气，到达地面。这也是地面探测到的簇射的主要成分。



大气簇射中各粒子成分的耦合



级联方程

- 在一维近似下，我们可以考虑粒子i的通量随大气深度$X = \int \rho\,(s)\,\mathrm{d}s$的变化

$$\frac{\partial \Phi_i(E,X)}{\partial X} = -\frac{\Phi_i(E,X)}{\lambda_i(E)} - \frac{\Phi_i(E,X)}{d_i(E,X)} + \sum_j \int_E^{\infty} \Phi_j\,(E',X) K_{j\to i}(E',E,X)\,\mathrm{d}E'$$

相互作用项　　衰变项　　粒子产生项

- $\lambda_i(E)$、$d_i(E,X)$ 分别为相互作用和衰变的长度尺度；
- 产生核 $K_{j\to i}(E',E,X)$ 包含母粒子的相互作用率或衰变率，以及相应的次级能量分布。其产生的母粒子中包括再产生（j=i）。
- 严格来说还需要考虑连续能损项 $\frac{\partial}{\partial E}[b_i(E,X)\Phi_i(E,X)]$，$b_i(E,X) = \frac{dE}{dX}$

MCEq：基于一维级联方程的模拟计算

- MCEq基于该一维级联方程进行通量计算。其将能量区间预先分块，单能量块内积分通量为：

$$F_{a,i}(X) = \int_{\Delta E_i} \Phi_a(E, X)\, \mathrm{d}E$$

- 则同一深度下所有粒子的状态集合可表述为向量F：

$$\mathbf{F}(X) = \begin{pmatrix} F_{p,1}(X) \\ \vdots \\ F_{p,n_E}(X) \\ F_{n,1}(X) \\ \vdots \\ F_{\pi^+,1}(X) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- 不同深度下的F间的关系则可以从级联方程中推得

MCEq：从级联方程到矩阵方程

- 定义粒子a与大气原子核的一次碰撞产生粒子b的概率为$Y_{j\to i}^{a\to b}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}F_{b,i}}{\mathrm{d}X}\right|_{\text{production}} = \sum_{a,j} Y_{j\to i}^{a\to b}\frac{F_{a,j}(X)}{\lambda_{a,j}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}F_{a,j}}{\mathrm{d}X}\right|_{\text{interaction loss}} = -\frac{F_{a,j}(X)}{\lambda_{a,j}}$$

- 则可以得到产生矩阵对应级联方程中的相互作用项和从相互作用中产生项：

$$(M_{\text{int}})_{(b,i),(a,j)} = \frac{Y_{ij}^{a\to b} - \delta_{ab}\delta_{ij}}{\lambda_{a,j}}$$

- 同理可得到衰变与衰变后产生新粒子的衰变矩阵：

$$(M_{\text{dec}})_{(b,i),(a,j)} = \frac{D_{ij}^{a\to b} - \delta_{ab}\delta_{ij}}{d_{a,j}}$$

MCEq：从级联方程到矩阵方程

- 一维模型中大气密度$\rho(X)$只与X有关，而衰变长度$d_{a,j}(X)$仅依赖于$\rho(X)$

$$d_{a,j}(X) = \rho(X)\beta_{a,j}\gamma_{a,j}c\tau_a$$

- 因而级联方程写为矩阵方程的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(X)}{\mathrm{d}X} = \left[\mathbf{M}_{\mathrm{int}} + \frac{1}{\rho(X)}\mathbf{M}_{\mathrm{dec}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}(X)\right]\mathbf{F}(X)$$

- 使用前向欧拉法即可计算出任意深度下的各粒子通量：

$$\mathbf{F}(X + \Delta X) = \mathbf{F}(X) + \Delta X\left[\mathbf{M}_{\mathrm{int}} + \frac{1}{\rho(X)}\mathbf{M}_{\mathrm{dec}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}(X)\right]\mathbf{F}(X)$$

- 其中$\mathbf{M}_{\mathrm{int}}$，$\mathbf{M}_{\mathrm{dec}}$与X无关因而不用在$\mathbf{F}(X)$的演化中重复计算。

MCEq：粒子链与快衰变处理

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X} = -\frac{F}{d}$$

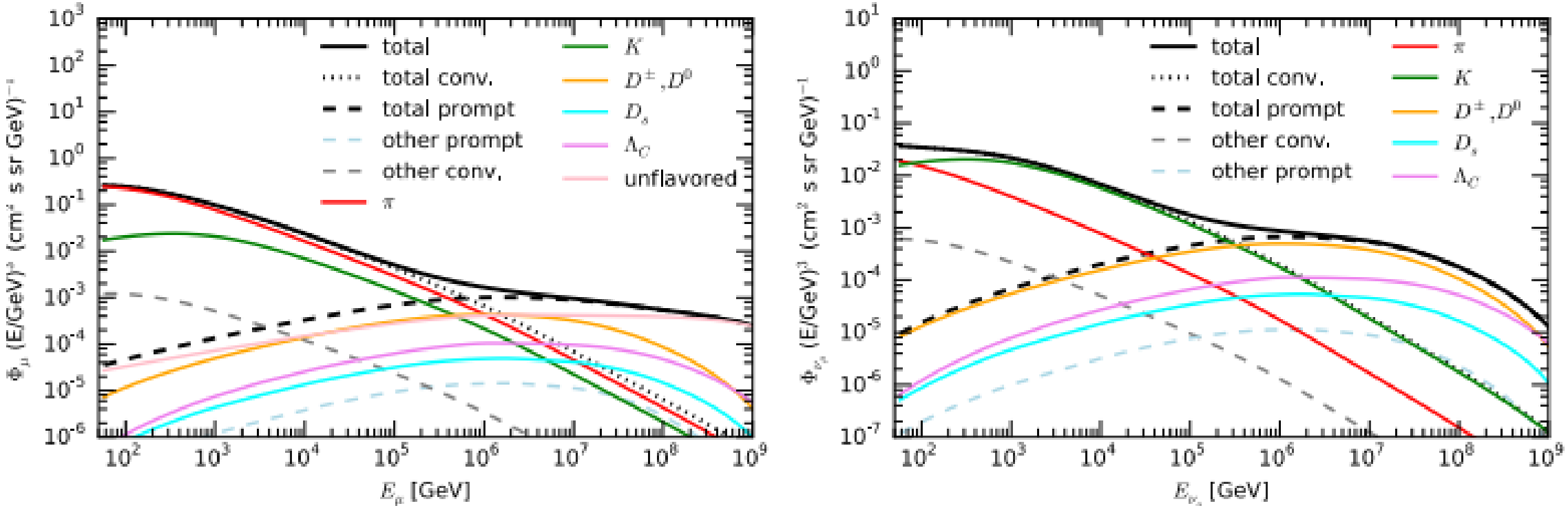
$$F_{n+1} = F_n - \frac{\Delta X}{d} F_n = \left(1 - \frac{\Delta X}{d}\right) F_n$$

- 在欧拉前向法中，ΔX的选择受到d大小的制约。（理想中$\Delta X \ll \mathrm{d}$）
- 对于寿命极短的中间态，可把产生与随后的衰变合并为一个有效源项，避免逐步追踪极短的传播距离。

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{eff}}^{a\to c} \supset \mathbf{D}^{r\to c}\mathbf{Y}^{a\to r}$$

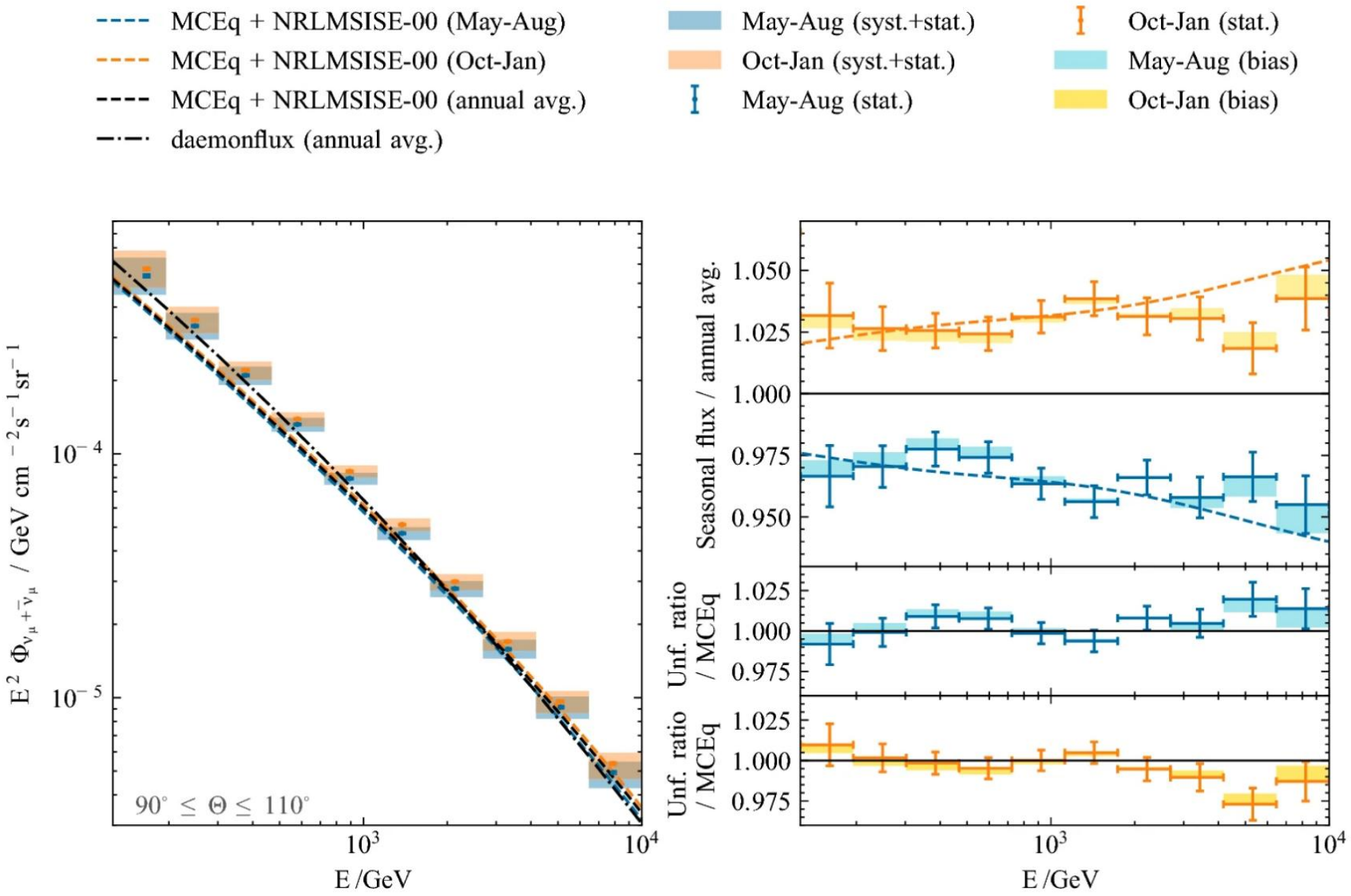
- 值得注意的是同一种粒子在不同能区可能采用不同处理。

MCEq 结果：轻子能谱与母粒子贡献

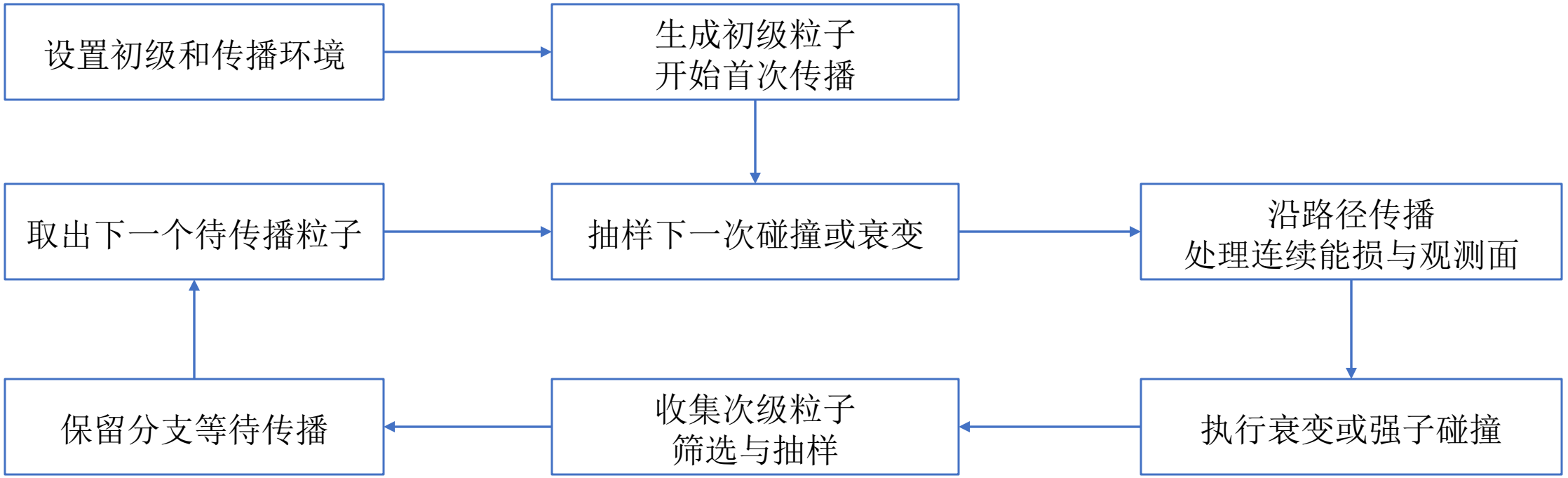


左： $\mu^+ + \mu^-$ 的能谱及母粒子分布；右：$\nu_\mu + \overline{\nu_\mu}$的能谱及母粒子分布。

MCEq 结果：IceCube中微子季节性变化测量结果比较



CORSIKA：簇射执行状态图



待传播粒子耗尽 → 汇总当前簇射 → 下一事例

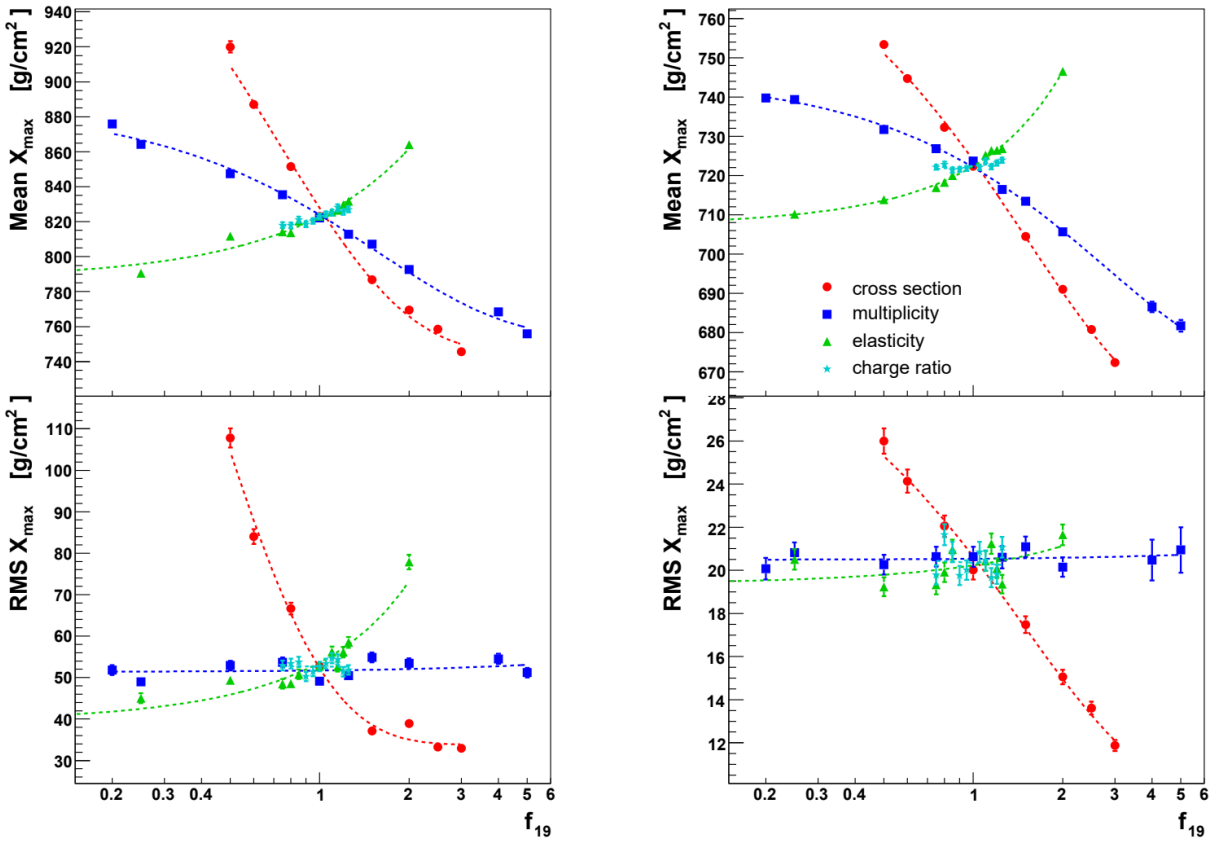
CORSIKA：逐粒子模拟的优势

- 运动学内容得以保留，能够研究簇射的横向发展，运动过程中能够引入磁场等对轨迹进行修正。
- 模拟中引入时间，可以分析粒子间产生时间与到达时间的分布与关联。
- 理论上能够保存簇射发展的历史，追溯子簇射的产生与发展。
- 逐个分次模拟能观察事例间的涨落。

强子模型如何影响簇射模拟？

- 即使初级粒子的种类和能量相同，碰撞发生的深度、次级粒子的数目和能量分配仍取决于强子模型。
- 这些变化会在多代级联中累积。这里每次只改变一项碰撞性质，比较簇射最大深度和地面 μ 子数的响应。
- 以左列质子簇射为例：从原模型出发增大截面，簇射平均更早达到峰值，峰值深度的分布也变窄。

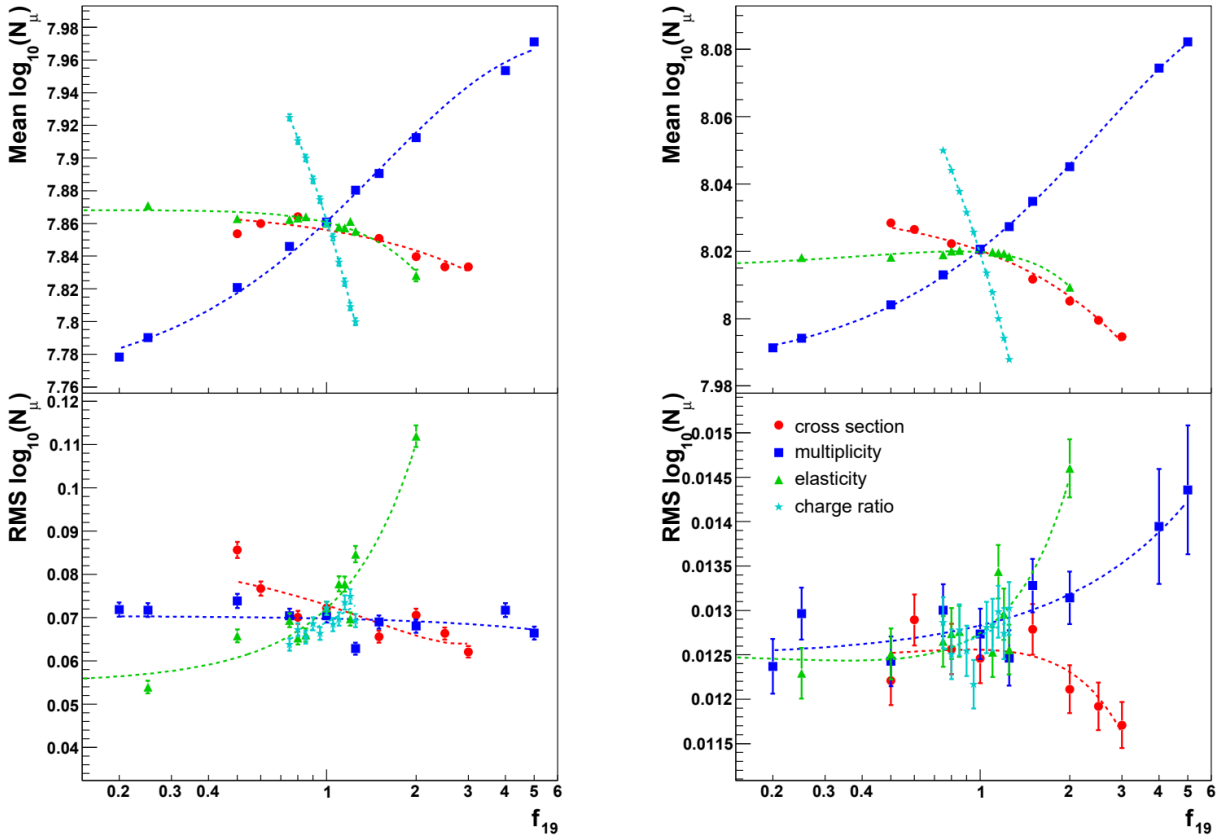
左：入射$10^{19.5}$ eV质子；右：入射$10^{19.5}$ eV铁核



强子模型如何影响簇射模拟？

- 地面 μ 子数同时受次级粒子多重数和中性 π 比例影响。改变其中任何一项，都可能改变地面计数。
- 例如，中性 π 比例升高时，更多能量通过光子进入电磁级联；留给带电介子产生 μ 子的能量减少。
- 因此，即使模型重现了平均 μ 子数，也要检验它能否同时描述簇射最大深度及其涨落，并区分初级成分的影响。

左：入射$10^{19.5}$ eV质子；右：入射$10^{19.5}$ eV铁核



总结

- 级联方程把次级粒子的产生、相互作用、衰变和能量损失联系起来。大气密度影响碰撞与衰变的竞争，强子模型决定碰撞后产生哪些粒子以及能量如何分配。
- MCEq 求解平均通量，便于快速比较不同模型输入下的能谱；CORSIKA 逐事例追踪粒子，可研究簇射间涨落，以及同一簇射中粒子的位置和时间关联。
- 同一观测量受多种碰撞性质影响：截面变化会改变簇射最大深度，中性 π 比例变化会改变地面 μ 子数。联合比较两者及其涨落，有助于区分模型偏差的来源。

感谢

备份：谱加权矩

- 对于幂律初级谱 $\Phi N(E) \propto E^{-\alpha}$，在近似标度成立时，可以用谱加权矩描述次级产生对通量的贡献。

$$Z_{NM}(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha - 1} \frac{\mathrm{d}n_M}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \qquad x = \frac{E_M}{E_N}$$

- 同一子粒子能量对应的母粒子能量随 x 改变。初级谱陡降，使前向、大能量比例的次级粒子具有重要权重。
- 原文若写作 $E^{-(\gamma+1)}$，则 $\alpha = \gamma + 1$；比较 Z 因子前需统一指数和产额定义。

[1] §5.2；[5] 式(27)

备份：相互作用与衰变的尺度

- 使用沿粒子路径积累的质量厚度 X 描述大气。相互作用长度主要由截面决定，衰变则与几何路径和粒子寿命有关。

$$X = \int \rho(s)\,\mathrm{d}s \qquad [X] = \mathrm{g\,cm^{-2}}$$

$$\ell_{\mathrm{dec}} \simeq c\tau \frac{E}{mc^2} \qquad d_{\mathrm{dec}}(E, X) = \rho(X)\ell_{\mathrm{dec}}$$

- 介子能量增加时，寿命膨胀使衰变受到抑制；在较低密度处，同样质量厚度对应更长的几何距离。
- 因此，能量、天顶角和大气密度共同决定介子继续级联还是转为轻子。近水平传播还需考虑地球曲率。

[1] §5.1、§5.7、§6.2

以带电 π 介子为例：选取可解析的近似

- 接下来以 π 介子为例近似解这个方程。取幂律初级宇宙线谱：（将核子视为一群质子/中子）

$$N_0(E) \propto E^{-(\gamma+1)}$$

- 核子不考虑衰变与**连续能损**，仅考虑其自产生过程：

$$\frac{\partial N(E,X)}{\partial X} = -\frac{N(E,X)}{\lambda_N(E)} + \int_E^\infty \frac{N(E',X)}{\lambda_N(E')} \frac{\mathrm{d}n_{N\to N}(E',E)}{\mathrm{d}E} \mathrm{d}E'$$

- 相互作用长度 $\lambda_N(E)$ 随 E变化较缓慢，假定其不变为常数 λ_N。结合边界条件，微分方程解为：

$$\mathrm{N(E,X)} = N_0(\mathrm{E}) e^{-\frac{\mathrm{X}}{\Lambda_N}}$$

- 其中 $\Lambda_N = \frac{\lambda_N}{1-Z_{NN}}$, $Z_{ji} = \int_0^1 x^\gamma \frac{\mathrm{d}n_{j\to i}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$, $x = \frac{E}{E\prime}$

以带电 π 介子为例：选取可解析的近似

- 将π_+,π_-的通量相加得到总通量

$$\Pi(E,X)=\Pi_{\pi^+}(E,X)+\Pi_{\pi^-}(E,X)$$

- 对于 π 介子，只考虑核子产生 π 介子与 π 介子的自产生过程，有

$$\frac{\partial\Pi(E,X)}{\partial X}=-\frac{\Pi(E,X)}{\Lambda_\pi}-\frac{\Pi(E,X)}{d_\pi(E,X)}+\frac{Z_{N\pi}}{\lambda_N}N_0(E)\exp\left(-\frac{X}{\Lambda_N}\right)$$

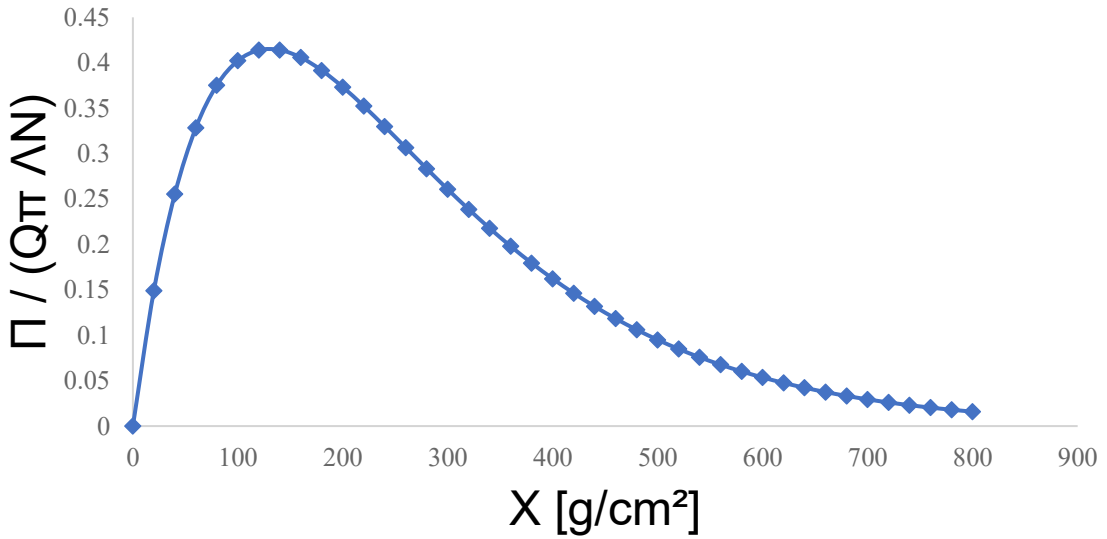
- 在平面等温大气近似与相对论近似下，有

高能极限：产生与衰减决定纵向分布

当 $E\cos\theta \gg \varepsilon_\pi$ 时，衰变项较小，一般积分解化为：

$$\Pi(E,X) \simeq Q_\pi(E)\frac{\Lambda_N\Lambda_\pi}{\Lambda_\pi-\Lambda_N}\left[e^{\frac{-X}{\Lambda_\pi}}-e^{\frac{-X}{\Lambda_N}}\right]$$

- 顶部尚未积累介子，通量从零上升。
- 核子源随深度衰减，介子也被有效吸收，因此通量在一定深度达到峰值后下降。
- 两个衰减长度控制曲线形状；峰值位置取决于所选能量和相互作用输入。



解析式形状示意：$\Lambda_N = 115$、$\Lambda_\pi = 148$ g/cm²；并非新模拟结果。

Gaisser 式(5.62)、(5.64)，表5.4；书页122–123

低能极限与解析近似的适用范围

当 $E\cos\theta \ll \varepsilon_\pi$ 时，介子衰变快，只有在观测深度附近产生的 π 容易存活。

$$\Pi(E,X) \simeq Q_\pi(E) e^{\frac{-X}{\Lambda_N}} \frac{X\,E\cos\theta}{\varepsilon_\pi}$$

介子通量较小，但介子衰变产生轻子的源项仍然可以显著：

$$\frac{\Pi}{d_\pi} = \frac{a}{X}\Pi \simeq Q_\pi(E) e^{\frac{-X}{\Lambda_N}}$$

解析例子给出产生、再生、衰变竞争的直观关系；后续 MCEq 用数值方法处理能量依赖的产生谱、截面和大气剖面。

Gaisser 式(5.69)–(5.70)；书页124–125